ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΑΘΗΝΩΝ 2017
ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι:

$$1+3+5+\cdots+(2\nu-1)=\nu^2, \quad (1) \qquad \nu\in\mathbb{N}^*$$

Απόδειξη

Βήμα 1ο. Εξετάζουμε αν η (1) ισχύει για $\nu=1$.

Δηλαδή: $2\cdot 1-1=1^2 \Leftrightarrow 1=1$, ισχύει.

Βήμα 2ο. Υποθέτουμε ότι η (1) ισχύει για $\nu=\kappa$.

Δηλαδή:

$$1+3+5+\cdots+(2\kappa-1)=\kappa^2, \quad (2)$$

Βήμα 3ο. Θα αποδείξουμε ότι η (1) ισχύει για $\nu=\kappa+1$. Δηλαδή:

$$1+3+5+\cdots+(2\kappa-1)+[2(\kappa+1)-1]=(\kappa+1)^2, \quad (3)$$

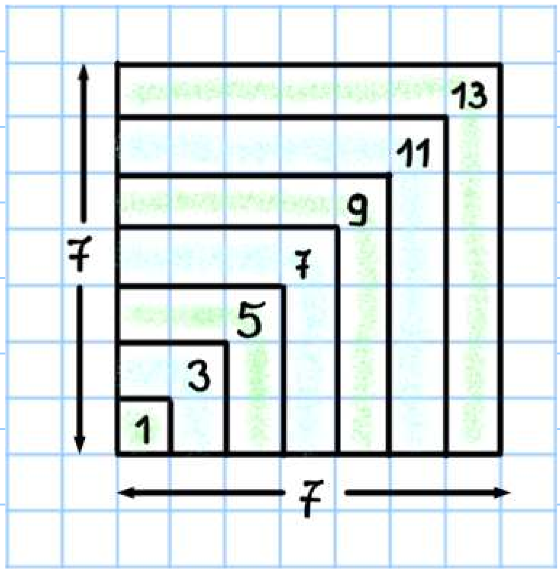
Έχουμε:

$$1+3+5+\cdots+(2\kappa-1)+[2(\kappa+1)-1]$$
$$\overset{(2)}{=} \kappa^2+2\kappa+1$$
$$=(\kappa+1)^2$$

Άρα ισχύει η (3) και λόγω της τελείας επαγωγής, ισχύει η (1) για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Β. Να αναπαραστήσετε τους επτά πρώτους όρους του παραπάνω αθροίσματος και στη συνέχεια τον τρόπο υπολογισμού του.

Λύση



Αναπαριστούμε τους 7 πρώτους όρους του αθροίσματος 1,3,5,7,9,11 και 13 με τετραγωνικές μονάδες, σε σχήμα 7, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα.

Το άθροισμα:

$1+3+5+7+9+11+13$

είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς 7 μονάδων, δηλαδή 7^2

Δηλαδή το παραπάνω μοτίβο αναπαριστά την ισότητα:

$$1+3+5+7+9+11+\underbrace{13}_{(2\cdot 7-1)} = 7^2$$

ΘΕΜΑ 2°

Να βρείτε το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι από τον αριθμό 1.200 και:

α) Διαιρούνται με το 12

β) Διαιρούνται με το 15.

γ) Διαιρούνται με το 12 και δεν διαιρούνται με το 15.

δ) Διαιρούνται μόνο με το 12 ή μόνο με το 15.

ε) Δεν διαιρούνται με το 12 ή με το 15.

Λύση

Θεωρούμε το σύνολο:

$$\underline{\Omega} = \{1, 2, 3, \dots, 1198, 1199\}$$

των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι από τον αριθμό 1.200.

Θεωρούμε επίσης τα σύνολα:

α) • $A = \{12, 24, \dots, 1188\}$, που αποτελείται από αριθμούς που ανήκουν στο σύνολο $\underline{\Omega}$ και είναι πολλαπλάσιοι του 12. Ο πληθάριθμος του συνόλου A είναι:

$$N(A) = \frac{1188}{12} = 99$$

β) • $B = \{15, 30, \dots, 1185\}$, που αποτελείται από αριθμούς που ανήκουν στο σύνολο $\underline{\Omega}$ και είναι πολλαπλάσιοι του 15. Ο πληθάριθμος του συνόλου B είναι:

$$N(B) = \frac{1185}{15} = 79$$

γ) Υπάρχουν τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 12 και 15, που είναι πολλαπλάσια του αριθμού Ε.κ.π $(12, 15) = 60$, τα οποία ανήκουν στο σύνολο $\underline{\Omega}$. Είναι:

$$A \cap B = \{60, 120, \dots, 1140\}$$

Ο πληθάριθμος του συνόλου $A \cap B$ είναι:

$$N(A \cap B) = \frac{1140}{60} = 19.$$

Είναι:

$$N(A - B) = N(A) - N(A \cap B) = 99 - 19 = 80$$

δ) $N[(A-B)\cup(B-A)] = N(A-B) + N(B-A) =$
$= N(A) - N(A\cap B) + N(B) - N(A\cap B)$
$= N(A) + N(B) - 2N(A\cap B) = 99 + 79 - 2\cdot 19 = 140.$

ε) $N[(A\cup B)'] = N(\Omega) - N(A\cup B)$
$= N(\Omega) - N(A) - N(B) + N(A\cap B)$
$= 1999 - 99 - 79 + 19$
$= 1840.$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Να βρείτε δύο θετικούς ακεραίους αριθμούς α και β που έχουν ΜΚΔ$(\alpha,\beta)=36$ και ΕΚΠ$(\alpha,\beta)=756$

Λύση

Έχουμε:

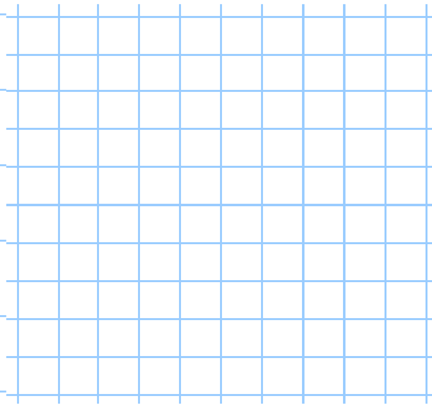
ΜΚΔ$(\alpha,\beta)=36 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 36\cdot\kappa \\ \beta = 36\cdot\lambda \end{cases}$ όπου $\kappa,\lambda \in \mathbb{N}^*$
και $(\kappa,\lambda)=1$, (1)

Ισχύει:

Μ.Κ.Δ$(\alpha,\beta)\cdot$ Ε.Κ.Π$(\alpha,\beta) = \alpha\cdot\beta$
$\Leftrightarrow 36\cdot 756 = 36\cdot\kappa\cdot 36\cdot\lambda \Rightarrow \kappa\cdot\lambda = 21$, (2)

Απο (1), (2) έχουμε ότι:
($\kappa=1$ και $\lambda=21$) ή ($\kappa=3$ και $\lambda=7$)
οπότε:
($\alpha=36$ και $\beta=756$) ή ($\alpha=108$ και $\beta=252$)
ή αντίστροφα ή
($\alpha=756$ και $\alpha=36$) ή ($\alpha=252$ και $\beta=108$)

Β. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών τετραγώνων που υπάρχουν στο 10×10 τετράγωνο του διπλανού σχήματος.



Λύση

Θεωρούμε ως διαφορετικά τετράγωνα αυτά που έχουν διαφορετικές πλευρές. Οι δυνατές τιμές της πλευράς α τετραγώνου από το σχήμα είναι $1 \leq \alpha \leq 10$. Επομένως το πλήθος των διαφορετικών τετραγώνων είναι 10.

ΘΕΜΑ 4°

Α. Αν $(\alpha,\beta)=1$ και $8\alpha+5\beta \neq 0$ να αποδείξετε ότι το κλάσμα $\dfrac{5\alpha+3\beta}{8\alpha+5\beta}$ είναι ανάγωγο.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(5\alpha+3\beta,\ 8\alpha+5\beta)=1$

Έστω $\delta=(5\alpha+3\beta,\ 8\alpha+5\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta \mid 5\alpha+3\beta \\ \delta \mid 8\alpha+5\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \mid 5\alpha+3\beta \\ \delta \mid 8\alpha+5\beta-5\alpha-3\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta \mid 5\alpha+3\beta \\ \delta \mid 3\alpha+2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \mid 5\alpha+3\beta \\ \delta \mid 5\alpha+3\beta-3\alpha-2\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta \mid 5\alpha+3\beta \\ \delta \mid 2\alpha+\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \mid 5\alpha+3\beta \\ \delta \mid 5\alpha+3\beta-2\alpha-\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta \mid 5\alpha + 3\beta \\ \delta \mid 3\alpha + 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \mid 5\alpha + 3\beta - 3\alpha - 2\beta \\ \delta \mid 3\alpha + 2\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta \mid 2\alpha + \beta \\ \delta \mid 3\alpha + 2\beta - 2\alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \mid 2\alpha + \beta \\ \delta \mid \alpha + \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta \mid 2\alpha + \beta - \alpha - \beta \\ \delta \mid \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \mid \alpha \\ \delta \mid \alpha + \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta \mid \alpha \\ \delta \mid \alpha + \beta - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \mid \alpha \\ \delta \mid \beta \end{cases} \Rightarrow \delta \mid (\alpha, \beta) = 1$$

$\Rightarrow \delta = 1$.

Άρα το κλάσμα $\dfrac{5\alpha + 3\beta}{8\alpha + 5\beta}$, είναι ανάγωγο.

Β. Να διατυπώσετε ένα μαθηματικό πρόβλημα του οποίου η λύση να δίνεται με εκτέλεση της πράξης $\frac{3}{4} : \frac{1}{12}$. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε μια εικονική αναπαράσταση με την οποία μπορείτε να εξηγήσετε στους μαθητές τον τρόπο εκτέλεσης αυτής της πράξης.

Λύση (το πρόβλημα)

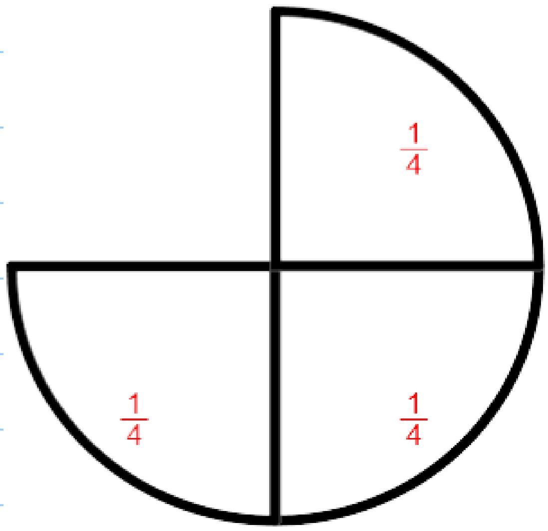
Στο πάρτυ της Φιλοθέης έχουν περισσέψει τα $\frac{3}{4}$ μιας πίτσας. Η μητέρα της την έκοψε σε μικρότερα κομμάτια, του $\frac{1}{12}$ της πίτσας.

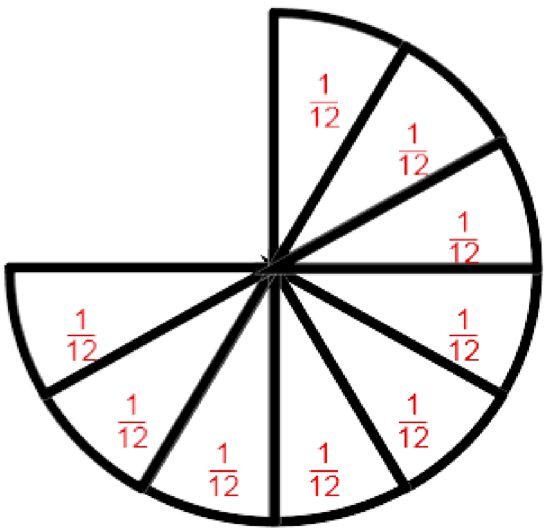
Σε πόσα παιδιά θα δώσει, η μητέρα της Φιλοθέης, από ένα κομμάτι του $\frac{1}{12}$ της πίτσας;

Απάντηση

Προφανώς για να λύσουμε το πρόβλημα πρέπει να διαιρέσουμε το $\frac{3}{4}$ με το $\frac{1}{12}$.

Το ζητούμενο είναι να δείξουμε πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης $\delta = \frac{1}{12}$ στον Διαιρετέο $\Delta = \frac{3}{4}$. Στο παρακάτω σχήμα, αριστερά φαίνονται τα $\frac{3}{4}$ της πίτσας με κλασματική μονάδα το $\frac{1}{4}$ και δεξιά τα $\frac{3}{4}$ της πίτσας με κλασματική μονάδα το $\frac{1}{12}$.





Στο σχήμα αυτό είναι φανερό ότι ο διαιρέτης $\delta = \frac{1}{12}$, χωράει στο Διαιρετέο $\Delta = \frac{3}{4}$ ακριβώς 9 φορές. Δηλαδή έχουμε ότι:

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{12} = 9.$$

Άρα η μητέρα της Φιλοθέης θα δώσει σε 9 παιδιά από ένα κομμάτι του $\frac{1}{12}$ της πίτσας.